

The background of the slide is a photograph of the EPFL campus in Lausanne, Switzerland. It shows modern university buildings, a large lake (Lac de Jussy), and distant mountains under a cloudy sky. A large red rectangular box is overlaid on the right side of the image, containing the title text.

Leçon 2.1

Oscillateur 1D Libre, Dissipatif

ME-332 – Mécanique Vibratoire

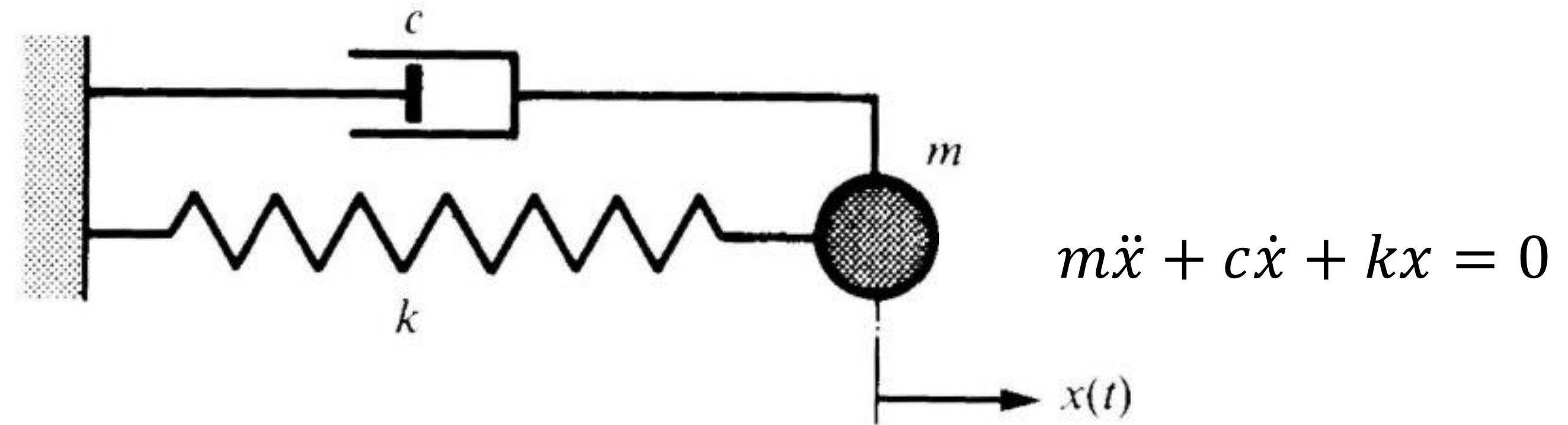
Prof. Guillermo Villanueva

- Régime libre dissipatif
- Cas surcritique
- Cas critique
- Cas sous-critique
- Energie dans le cas sous-critique

Chapitre 3

Oscillateur 1D libre, dissipatif

EPFL Régime libre dissipatif



- Approche énergétique

- $\frac{dH}{dt} \neq 0$

- Puissance dissipée

- $\frac{dH}{dt} = -W(t) = -c\dot{x} \cdot \dot{x} \rightarrow \frac{dH}{dt} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = -c\dot{x}^2 \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

EPFL Régime libre dissipatif

Régime libre de l'oscillateur élémentaire dissipatif

$$\ddot{x} + 2 \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.32)$$

Solution générale de l'équation différentielle

$$x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

Définition de la grandeur ω_1

$$\omega_1^2 = \left| \lambda^2 - \omega_0^2 \right| = \omega_0^2 \left| \eta^2 - 1 \right| \quad (3.35)$$

EPFL Régime libre dissipatif (Laplace)

Régime libre de l'oscillateur élémentaire dissipatif

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.32)$$

$$X(s)(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2) = X_0(s + 2\lambda) + V_0$$

$$X(s) = X_0 \frac{s + 2\lambda}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + V_0 \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}$$

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

EPFL Types d'amortissement relatif

$$s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega_0 \sqrt{\eta^2 - 1}$$

$\eta > 1$ amortissement surcritique

$\eta = 1$ amortissement critique

$\eta < 1$ amortissement sous-critique

EPFL Amortissement surcritique

$$\eta > 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = \omega_0^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \quad (3.36)$$

Racines de l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - \omega_1 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$x = e^{-\lambda t} \left(A e^{\omega_1 t} + B e^{-\omega_1 t} \right) \quad (3.38)$$

$$x(0) = X_0, \quad \dot{x}(0) = V_0$$

$$\dot{x} = -e^{-\lambda t} \left[(\lambda - \omega_1) A e^{\omega_1 t} + (\lambda + \omega_1) B e^{-\omega_1 t} \right] \quad (3.39)$$

$$X(s) = X_0 \frac{s + 2\lambda}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + V_0 \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{X_0 s + 2\lambda X_0 + V_0}{(s - r_1)(s - r_2)} = \dots$$

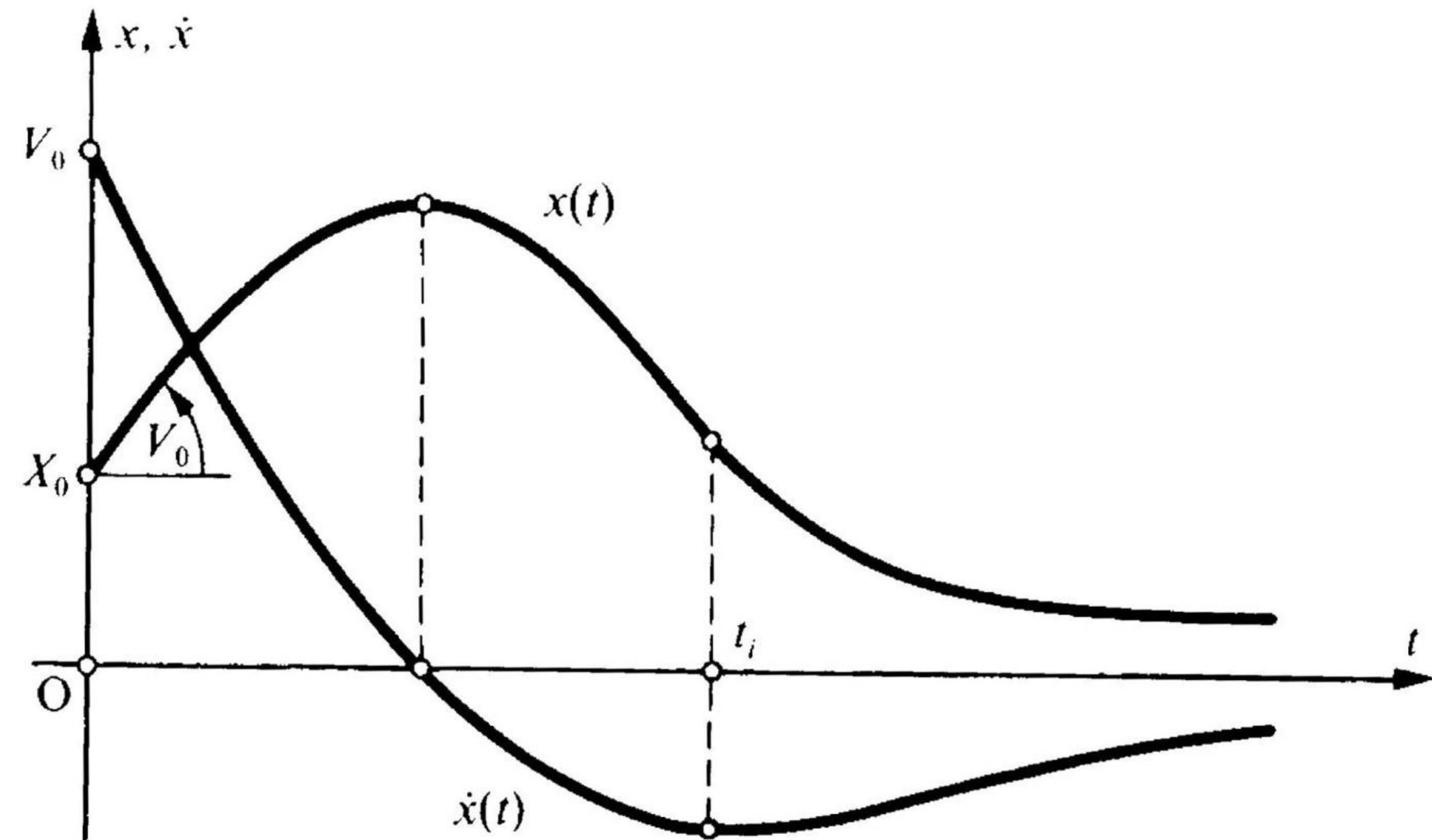
EPFL Amortissement surcritique

Constantes d'intégration correspondant aux conditions initiales

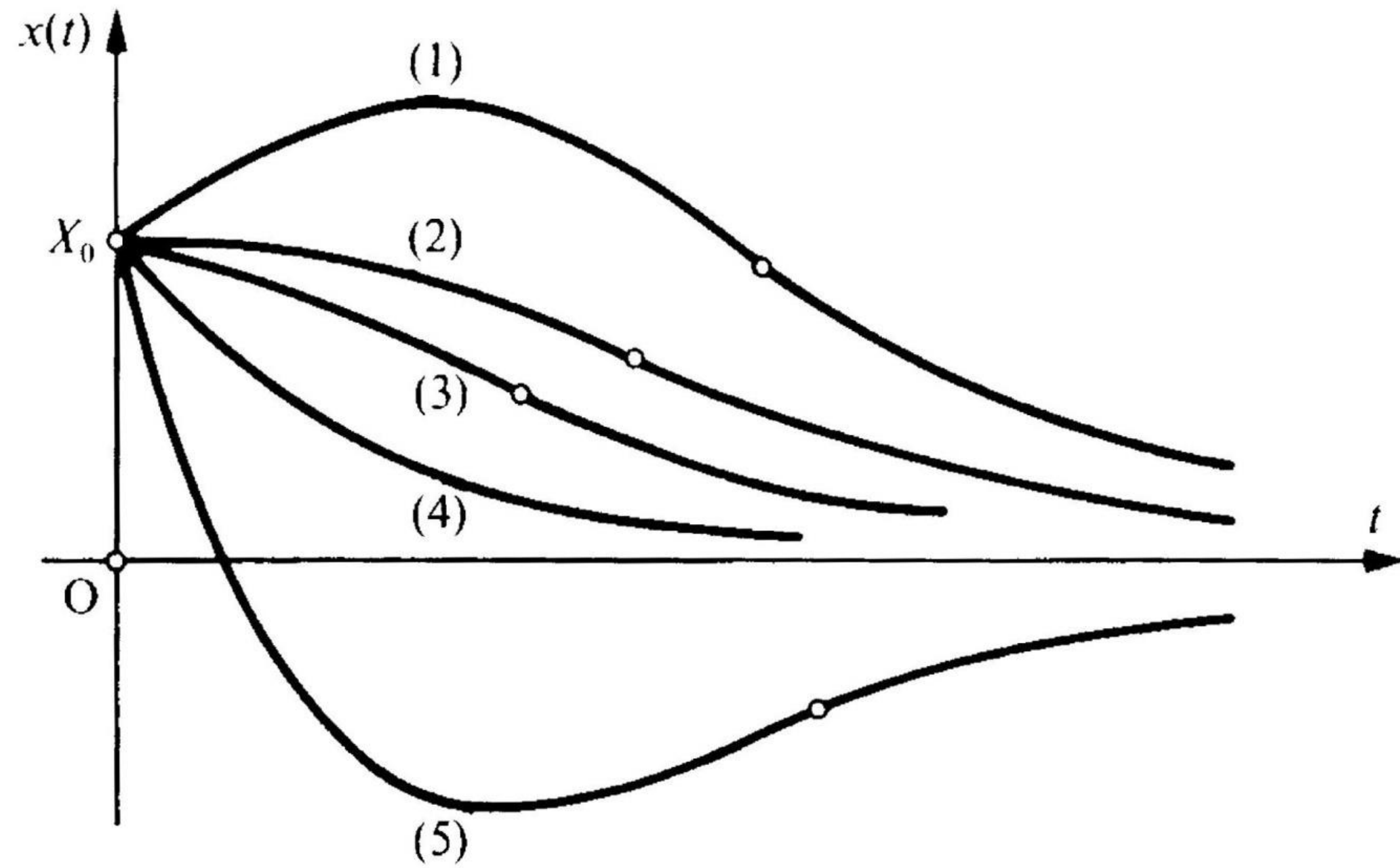
$$\begin{cases} A = \frac{1}{2\omega_1} [X_0(\lambda + \omega_1) + V_0] \\ B = \frac{-1}{2\omega_1} [X_0(\lambda - \omega_1) + V_0] \end{cases}$$

Solution du régime libre (amortissement surcritique) avec lâcher initial

$$(3.40) \rightarrow x = e^{-\lambda t} \left(X_0 \operatorname{ch} \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \operatorname{sh} \omega_1 t \right) \quad (3.41)$$



EPFL Amortissement surcritique



$$(1) \quad V_0 > 0 \quad (2) \quad V_0 = 0 \quad (3) \quad -X_0 \frac{\omega_0^2}{2\lambda} < V_0 < 0$$

$$(4) \quad -X_0(\lambda + \omega_1) < V_0 < -X_0 \frac{\omega_0^2}{2\lambda}$$

$$(5) \quad V_0 < -X_0(\lambda + \omega_1)$$

EPFL Amortissement critique

$$\eta = 1$$

Racine double de l'équation caractéristique

$$r_1 = r_2 = -\lambda = -\omega_0 \quad (3.43)$$

Solution du régime libre (amortissement critique)

$$x = (A + B t) e^{-\omega_0 t} \quad (3.44)$$

$$\dot{x} = [(B - \omega_0 A) - \omega_0 B t] e^{-\omega_0 t} \quad (3.45)$$

EPFL Amortissement critique

Constantes d'intégration correspondant aux conditions initiales

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = \omega_0 X_0 + V_0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Solution du régime libre (amortissement critique) avec lâcher initial

$$x = \left[X_0 + (\omega_0 X_0 + V_0)t \right] e^{-\omega_0 t} \quad (3.47)$$

EPFL Amortissement sous-critique

$$\eta < 1 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$$

Racines complexes de l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + j \omega_1 \\ r_2 = -\lambda - j \omega_1 \end{cases} \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (3.51)$$

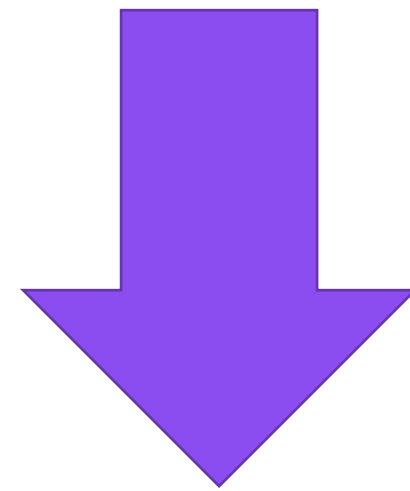
Définition de la *pulsation propre* ω_1 de
l'*oscillateur amorti*

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad (3.52)$$

EPFL Amortissement sous-critique

$$X(s) = \frac{X_0 s + 2\lambda X_0 + V_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{X_0 s + 2\lambda X_0 + V_0}{s^2 + 2\lambda s + \lambda^2 - \lambda^2 + \omega_0^2} = \frac{X_0 s + 2\lambda X_0 + V_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}$$

$$X(s) = X_0 \frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2} + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \frac{\omega_1}{(s + \lambda)^2 + \omega_1^2}$$



$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

$$x(t) = X_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t) + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} e^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t)$$

EPFL Amortissement sous-critique

$$x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \quad (3.53)$$

$$\dot{x} = e^{-\lambda t} \left((-\lambda A + \omega_1 B) \cos \omega_1 t - (\omega_1 A + \lambda B) \sin \omega_1 t \right) \quad (3.54)$$

Constantes d'intégration correspondant aux conditions initiales

$$\begin{cases} A = X_0 \\ B = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \end{cases} \quad (3.55)$$

Solution du régime libre (amortissement sous-critique) avec lâcher initial

$$x = e^{-\lambda t} \left(X_0 \cos \omega_1 t + \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (3.56)$$

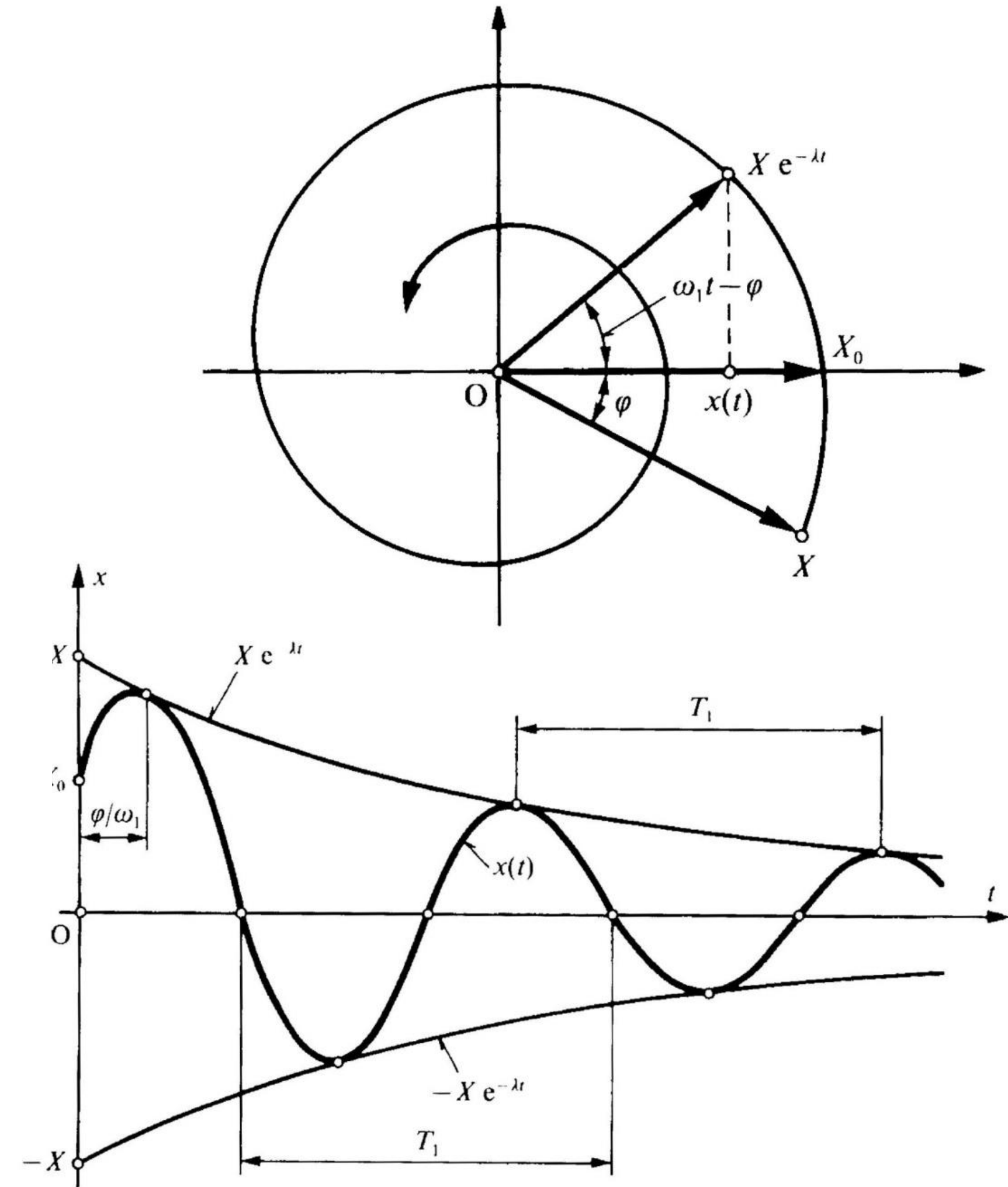
EPFL Amortissement sous-critique

Autre forme de la solution

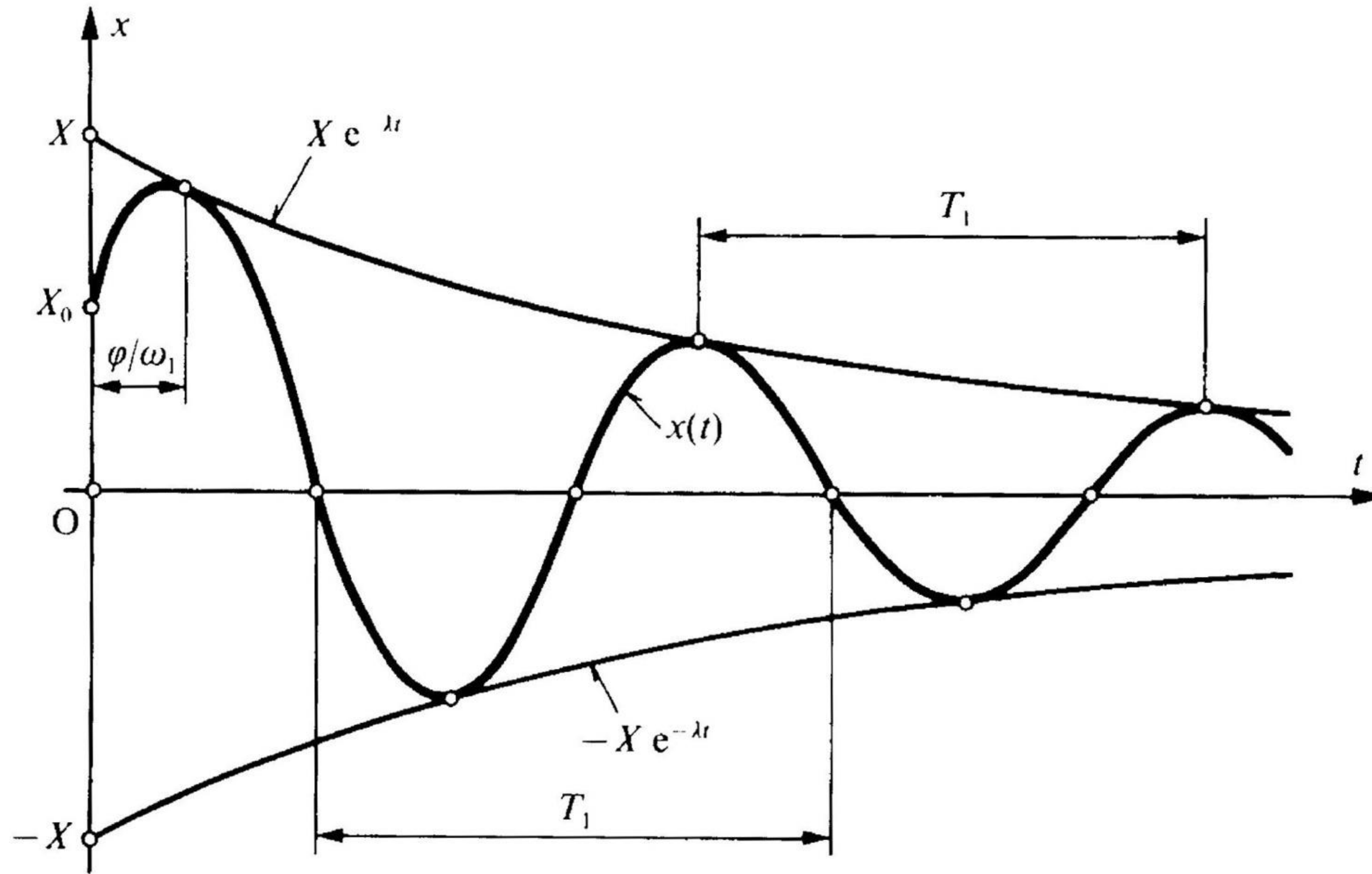
$$x = X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (3.57)$$

avec

$$\begin{cases} X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1} \right)^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda X_0 + V_0}{\omega_1 X_0} \end{cases} \quad (3.58)$$



EPFL Amortissement sous-critique



Notion de *pseudo-période*

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (3.59)$$

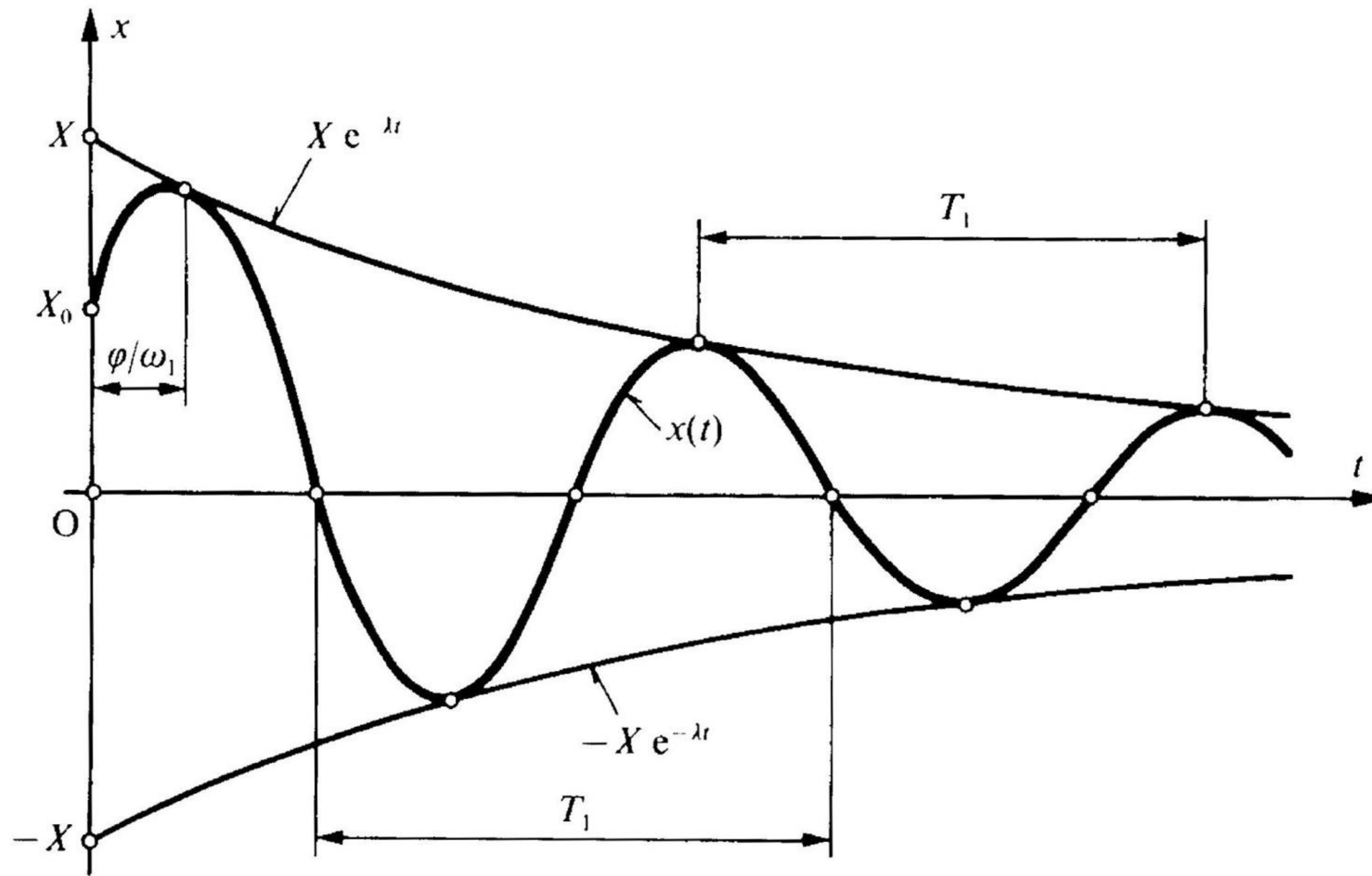
$$= \frac{T_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad T_1 > T_0 \quad (3.60)$$

Notion de *décrément logarithmique*

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t + n T_1)} \quad (3.61)$$

$$= \frac{1}{n} \ln e^{n \lambda T_1} = \lambda T_1 \quad (\text{indépendant de } n)$$

EPFL Amortissement sous-critique



Lien entre décrément logarithmique et amortissement relatif

$$\Lambda = \frac{2\pi\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (3.62)$$

$$\eta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad (3.63)$$

$$\approx \frac{\Lambda}{2\pi} \quad \text{si } \eta^2 \ll 1 \quad (3.64)$$

EPFL Energie – cas sous-critique

$$x = X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (3.57)$$

Quasi-quadrature entre *vitesse* et *déplacement* de l'oscillateur faiblement dissipatif (amortissement sous-critique)

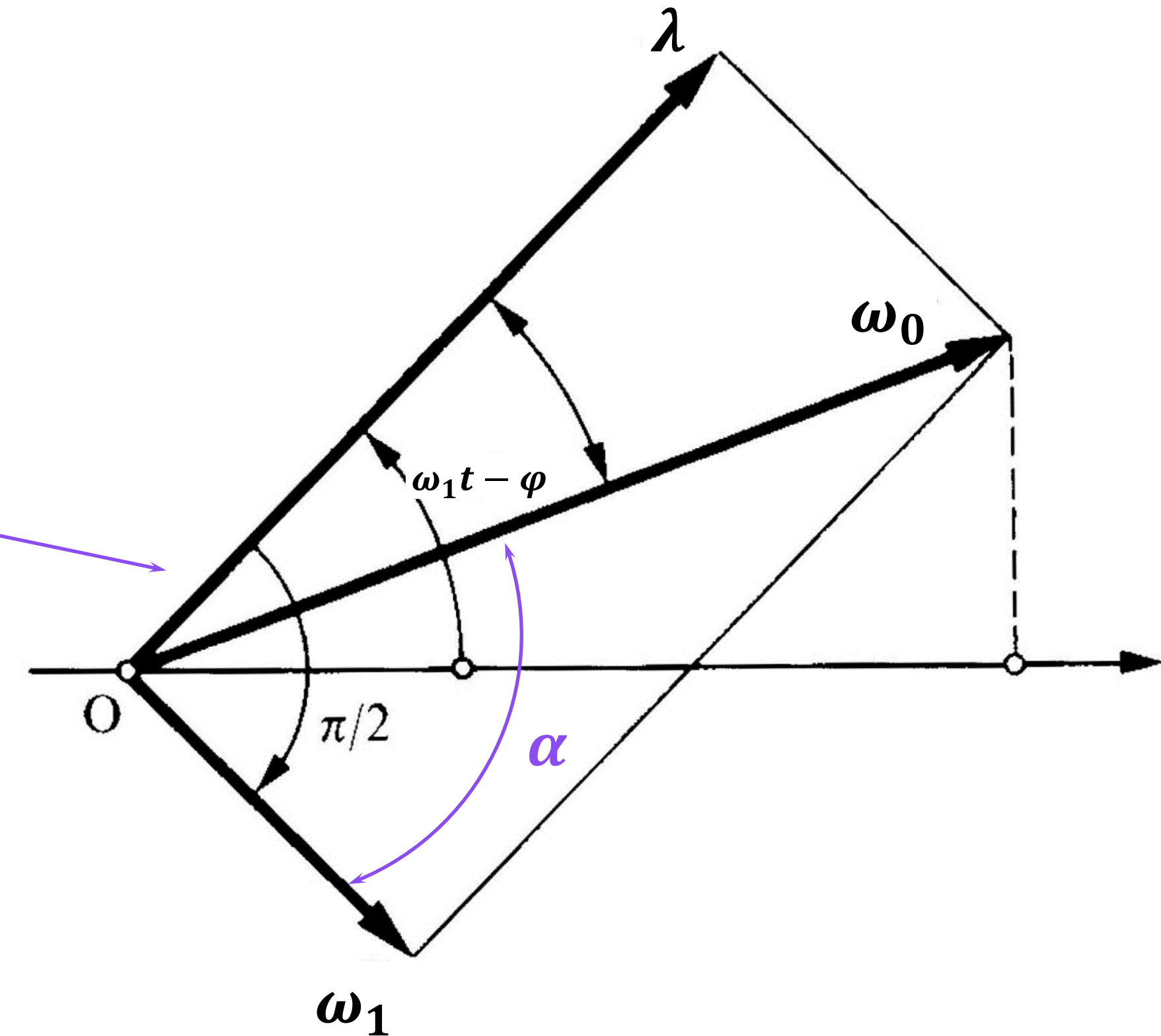
$$\dot{x} = -X e^{-\lambda t} \left(\lambda \cos(\omega_1 t - \varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi) \right) \quad (3.65)$$

$$= -X \sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2} e^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t - \varphi + \alpha)$$

$$= -\omega_0 X e^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t - \varphi + \alpha) \quad (3.66)$$

avec

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{\omega_1} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \approx \eta \quad \text{si } \eta \ll 1$$



EPFL Energie – cas sous-critique

$$x = X e^{-\lambda t} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (3.57)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 X e^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t - \varphi + \alpha) \quad (3.66)$$

Energie cinétique de l'oscillateur dissipatif (amortissement sous-critique)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X^2 e^{-2\lambda t} \sin^2(\omega_1 t - \varphi + \alpha)$$

Energie potentielle de l'oscillateur dissipatif (amortissement sous-critique)

$$V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k X^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega_1 t - \varphi)$$

EPFL Energie – cas sous-critique

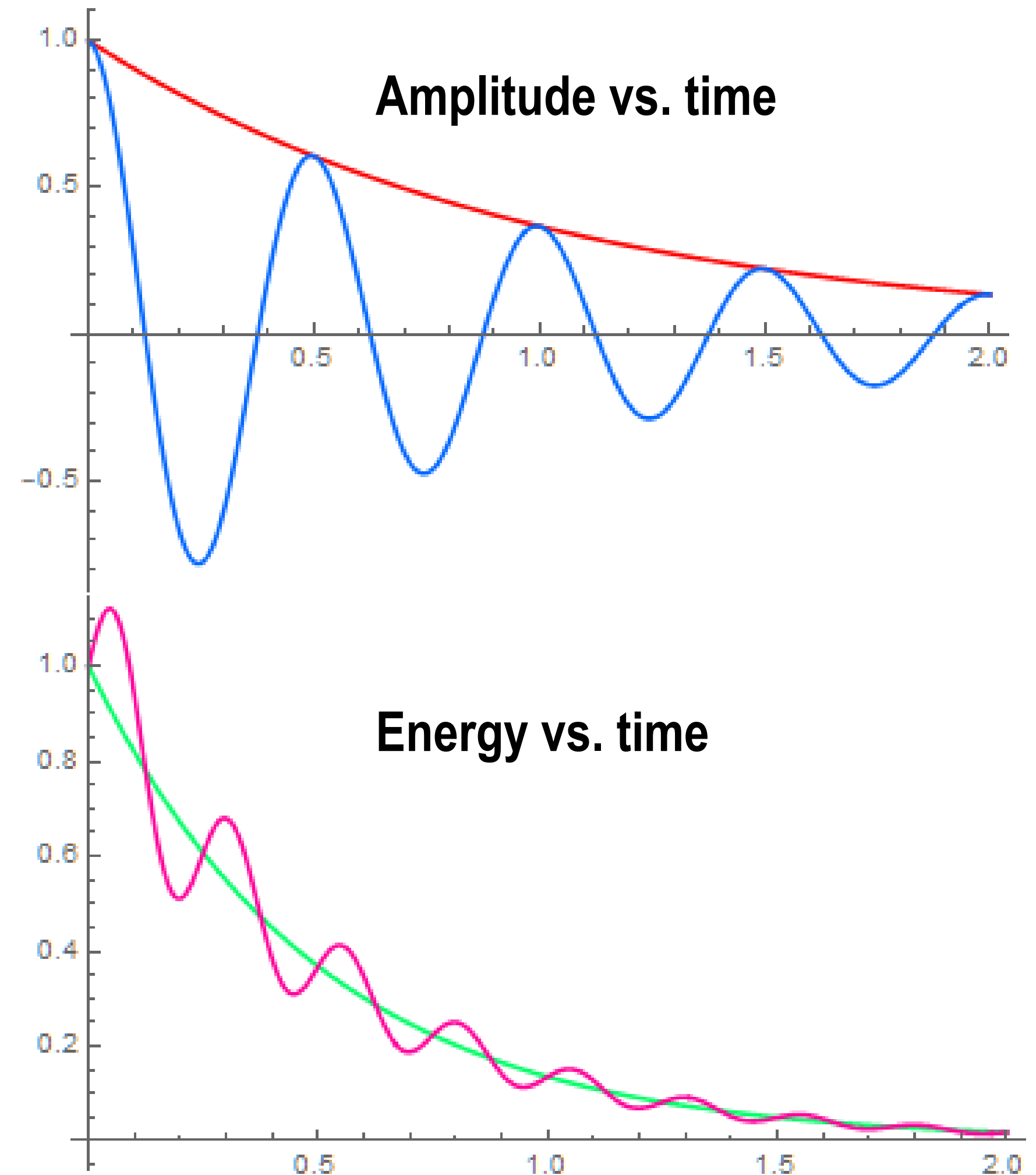
$$\beta = \varphi - \frac{\alpha}{2}$$

Forme compacte de l'énergie totale (oscillant à la pulsation $2 \omega_1$)

$$H = \bar{H} \left(1 + \eta \sin 2(\omega_1 t - \beta) \right)$$

Valeur moyenne décroissante de l'énergie (énergie poten-tielle correspondant à l'enveloppe du déplacement)

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k X^2 e^{-2\lambda t} = \frac{1}{2} k \left(X e^{-\lambda t} \right)^2 \quad (3.71)$$



EPFL Energie – cas sous-critique

Energie perdue par l'oscillateur entre 0 et t

$$\Delta H_0^t = H_0 - H(t) \quad (3.74)$$

*Energie perdue pour un faible amortissement
relatif ($\eta \ll 1$)*

$$H_0 \approx \bar{H}_0 \quad H(t) \approx \bar{H}(t)$$

$$\Delta H_0^t = \bar{H}_0 - \bar{H}(t) = \frac{1}{2} k X^2 (1 - e^{-2\lambda t}) \quad (3.77)$$

*Energie perdue par l'oscillateur entre $t = t_1$ et $t = t_2$
pour un faible amortissement relatif ($\eta \ll 1$)*

$$\Delta H_{t_1}^{t_2} = \bar{H}(t_1) - \bar{H}(t_2) = \frac{1}{2} k X^2 (e^{-2\lambda t_1} - e^{-2\lambda t_2}) = \bar{H}(t_1) (1 - e^{-2\lambda \Delta t}) \quad (3.78)$$